# Ex 1 TD 1 CHAÎNES DE MARKOV

Calcul de $\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_0 = 1)$, $i = 1, \dots, 5$.

D'après le cours, la probabilité est égale à l'élément 1ère ligne, 1ère colonne de la matrice $P^i$

i.e. $\mathbb{P}(X_i = 1 / X_0 = 1) = P^i(1,1)$

Donc on a seulement besoin de calculer la 1ère ligne de chaque puissance $P^i$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \mathbb{P}(X_1 = 1 / X_0 = 1) = 0$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = 0$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & \frac{7-3p}{9} & \frac{2}{9} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{p}{3}$

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & \frac{7-3p}{9} & \frac{2}{9} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2p}{9} & \frac{p+16}{27} & \frac{7-3p}{27} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{2p}{9}$

$$P^5 = \begin{pmatrix} \frac{2p}{9} & \frac{p+16}{27} & \frac{7-3p}{27} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(7-3p)p}{27} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X_5 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{(7-3p)p}{27}$.